Fautomata által indukált relációk

Vágvölgyi Sándor
SZTE TTIK
Számítástudomány Alapjai Tanszék
e-mail: vagvolgy@inf.u-szeged.hu

Relációk Legyen $\rightarrow \subseteq S \times S$ reláció S felett.

$a \rightarrow b$ -t írunk $(a, b) \in \rightarrow$ helyett.

$\rightarrow^+$ a $\rightarrow$ tranzitív lezártja,

$\rightarrow^*$ a $\rightarrow$ reflexív, tranzitív lezártja,

$\leftrightarrow^*$ a $\rightarrow$ reflexív, szimmetrikus, tranzitív lezártja.

Állítás $\leftrightarrow^*$ ekvivalencia reláció.

Termek (Fák). Legyen Σ rangolt ábécé és Y halmaz tetszőleges. A ΣY-termek $T_\Sigma(Y)$ halmaza a legszűkebb U halmaz:

(i) $\Sigma_0 \cup Y \subseteq U$,

(ii) $f(t_1, \ldots, t_m) \in U$, ahol $f \in \Sigma_m$ with $m \geq 1$, $t_1, \ldots, t_m \in U$.

$T_\Sigma(\emptyset)$ az alaptermek halmaza, röviden T_Σ jelöli.

Faautomaták. $\mathbf{A} = (A, \Sigma, R)$ faautomata, ahol az A állapothalmaz nulla rangú szimbólumokból áll, Σ az input rangolt ábécé.

R szabályok halmaza. A szabályok alakja

$$f(a_1, \ldots, a_m) \to a \tag{1}$$

ahol $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$, $a_1, \ldots, a_m, a \in A$.

$\forall\ p, q \in T_\Sigma$: $p \to_{\mathbf{A}} q \iff \exists$ (1) szabály: p-ből úgy kapjuk meg q-t hogy az $f(a_1, \ldots, a_m)$ bal oldal valamely p fabeli előfordulását az a jobb oldallal helyettesítjük.

Az $a \in A$ állapot elérhető ha $\exists t \in T_\Sigma : t \to_{\mathbf{A}}^* a$. El tudjuk dönteni hogy egy állapot elérhető-e. $\mathbf{A}$ összefüggő ha minden állapota elérhető.

$\mathbf{A}$ determinisztikus ha $\forall f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$, $a_1, \ldots, a_m \in A$: legfeljebb egy szabály van $f(a_1, \ldots, a_m)$ bal oldallal.

Dauchet és társai bevezették az alap fatranszformátor fogalmát. Az $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ alap fatranszformátor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automatákból álló rendezett pár. Az indukált transzformáció $\tau(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ olyan (p, q) fapárokból áll amelyeket $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ közös s fára ír át:

$$\tau(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{\, (p, q) \in T_\Sigma \times T_\Sigma \mid \exists s : p \xrightarrow[\mathbf{A}]{*} s,\ q \xrightarrow[\mathbf{B}]{*} s \,\}$$

Tétel. Az alap fatranszformációk osztálya tartalmazza az alap termátíró rendszerek által kiszámolt relációk reflexív, tranzitív lezártjait.

Azt a speciális esetet tekintjük, amikor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Az $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ alap fatranszformátor által indukált $\tau(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ alap fatranszformációt $\pi(\mathbf{A})$ jelöli.

$$\pi(\mathbf{A}) = \{ (p, q) \in T_\Sigma \times T_\Sigma \mid \exists s \in T_{\Sigma \cup A} : p \xrightarrow[\mathbf{A}]{*} s,\ q \xrightarrow[\mathbf{A}]{*} s \}.$$

Definíció $\pi(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ faautomata által indukált fatranszformáció.

Példa. Tekintsük az $\mathbf{A}$ faautomatát, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, $\Sigma_1 = \{ f \}$, $\Sigma_0 = \{ \# \}$, $A = \{ 0, 1 \}$, szabályok: $\# \to 0$, $f(0) \to 1$.

$$f(f(f(\#))) \to_{\mathbf{A}} f(f(f(0))) \to_{\mathbf{A}} f(f(1)) \to_{\mathbf{A}} f(0)$$

$$f(\#) \to_{\mathbf{A}} f(0).$$

Tehát $(f(f(f(\#))), f(\#)) \in \pi(\mathbf{A})$.

$$\pi(\mathbf{A}) = \{ (f^k(\#), f^m(\#)) \mid k - m \text{ páros } \}.$$

Tétel A determinisztikus faautomaták által indukált alap fatranszformációk osztálya megegyezik az alap termátíró rendszerek által kiszámolt relációk reflexív, szimmetrikus, tranzitív lezártjainak osztályával. (Fülöp és Vágvölgyi)

Tétel A determinisztikus faautomaták által indukált alap fatranszformációk osztálya valódi részosztálya a faautomaták által indukált alap fatranszformációk osztályának. (Fülöp és Vágvölgyi)

Példa. Tekintsük az $\mathbf{A}$ faautomatát. $\Sigma = \Sigma_0 = \{ f, g, h \}$, $A = \{ a, b, c \}$, $\mathbf{A}$ szabályai: $f \to a$, $f \to b$, $g \to b$, $g \to c$, $h \to c$.

$\pi(\mathbf{A}) = \{ (f, f), (f, g), (g, f), (g, g), (g, h), (h, g), (h, h) \}$.

Állítás Nincsen olyan $\mathbf{B}$ determinisztikus faautomata hogy $\pi(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{B})$.

Legyen $\mathbf{B}$ determinisztikus faautomata úgy hogy $\pi(\mathbf{A}) \subseteq \pi(\mathbf{B})$.

$(f, g) \in \pi(\mathbf{B}) \Longrightarrow f \to d$ és $g \to d$ $\mathbf{B}$ szabályai ahol $d \in B$.

$(g, h) \in \pi(\mathbf{B}) \Longrightarrow h \to d$ $\mathbf{B}$ szabálya $\Longrightarrow (f, h) \in \pi(\mathbf{B})$ $\Longrightarrow \pi(\mathbf{A}) \subset \pi(\mathbf{B})$.

Definíció Megszorítjuk a $\Sigma \cup A$-term algebra feletti $\leftrightarrow^*_{\mathbf{A}}$ kongruencia relációt a Σ feletti alaptermekre: $\theta(\mathbf{A}) = \leftrightarrow^*_{\mathbf{A}} \cap T_\Sigma \times T_\Sigma$.

Állítás Minden $\mathbf{A}$ faautomata esetén

- $\theta(\mathbf{A})$ kongruencia a Σ-term algebra felett.

- $\pi(\mathbf{A}) \subseteq \theta(\mathbf{A})$.

Állítás Minden $\mathbf{A}$ determinisztikus faautomata esetén $\theta(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{A})$.

Példa Tekintsük az $\mathbf{A}$ faautomatát, $\Sigma = \Sigma_0 = \{ f, g, h \}$ $A = \{ a, b \}$, a szabályok: $f \to a$, $g \to a$, $g \to b$, $h \to b$.

$\mathbf{A}$ összefüggő.

$\theta(\mathbf{A}) = \{ (f, f), (f, g), (f, h), (g, f), (g, g), (g, h),$
$(h, f), (h, g), (h, h) \}$,

$\pi(\mathbf{A}) = \{ (f, f), (f, g), (g, f), (g, g), (g, h), (h, g), (h, h) \}$.

Tetszőleges $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ faautomatákra eldönthető hogy $\pi(\mathbf{A}) \subseteq \pi(\mathbf{B})$ teljesül-e. (Dauchet és társai)

Tétel. Tetszőleges R alap termátíró rendszerre megkonstruálhatunk olyan $\mathbf{A}$ determinisztikus faautomatát hogy $\leftrightarrow_R^* = \theta(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{A})$. (Fülöp és Vágvölgyi)

Definíció $\eta \subseteq A \times A$ ekvivalencia reláció kongruencia az $\mathbf{A}$ faautomatán ha

$f(a_1, \ldots, a_m) \to a$, $f(b_1, \ldots, b_m) \to b$ és $a_j \eta b_j$, $1 \leq j \leq m$, $\Longrightarrow a \eta b$.

Legyen η kongruencia $\mathbf{A}$ faautomatán.

$\mathbf{A}/\eta = (A/\eta, \Sigma, R/\eta)$ az η szerinti faktorautomata

$A/\eta = \{\, [a]_\eta \mid a \in A \,\}$,

R/η szabályai:

$f([a_1]_\eta, \ldots, [a_m]_\eta) \to [a]_\eta \iff f(a_1, \ldots, a_m) \to a \in \mathbf{A}$.

Tétel. $\mathbf{A}/\eta$ determinisztikus faautomata.

Fő faktor faautomata Legyen $\mathbf{A}$ faautomata. $\rho \subseteq A \times A$ determinizáló reláció definíciója:

$\rho_i \subseteq A \times A$, $i \geq 0$,

$\rho_0 = \{\, (a,a) \mid a \in A \,\}$.

$\forall i \geq 1$: $\rho_{i-1}^{+} \subseteq \rho_i$. Ha $f(a_1,\ldots,a_m) \to a$, $f(b_1,\ldots,b_m) \to b$ és $a_j \rho_{i-1} b_j$, $1 \leq j \leq m$, akkor $(a,b) \in \rho_i$.

$\rho_0 \subseteq \rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \cdots$, ρ_i reflexív és szimmetrikus, $i \geq 0$.
$\rho_i \subseteq \leftrightarrow_A^* \cap A \times A$, $i \geq 0$.

$\exists$ legkisebb k: $\rho_k = \rho_{k+1}$.

Akkor $\rho_k = \rho_{k+1} = \rho_{k+2} = \cdots$.

Legyen $\rho = \rho_k$. ρ az $\mathbf{A}$ determinizáló relációja.

Tétel. ρ tulajdonságai:

ρ megkonstruálható,

ρ ekvivalencia reláció A-n,

ρ az $\mathbf{A}$ faautomata kongruencia relációja,

$\rho \subseteq \leftrightarrow_{\mathbf{A}}^* \cap A \times A$.

Definíció $\mathbf{A}/\rho$ faktor faautomatát $\mathbf{A}$ fő faktor automatájának hívjuk.

Példa. Tekintsük az $\mathbf{A}$ faautomatát, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, $\Sigma_1 = \{ f, g \}$, $\Sigma_0 = \{ \# \}$, $A = \{ a, b \}$, szabályok: $\# \to a$, $\# \to b$, $f(a) \to a$, $f(b) \to b$.

$\rho_0 = \{ (a, a), (b, b) \}$,

$\rho_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) \}$, $\rho_1 = \rho_2$,

$\rho = \rho_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) \}$. A/ρ egyetlen eleme $\{ a, b \}$. $\mathbf{A}/\rho$ szabályai: $\# \to \{ a, b \}$, $f(\{ a, b \}) \to \{ a, b \}$.

$\pi(\mathbf{A}/\rho) = \theta(\mathbf{A}/\rho) = T_\Sigma \times T_\Sigma$.

Példa. Tekintsük az $\mathbf{A}$ faautomatát, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, $\Sigma_1 = \{ f \}$, $\Sigma_0 = \{ \# \}$, $A = \{ 0, \$, 1, 2 \}$, szabályok: $\# \to 0$, $f(0) \to \$$, $f(0) \to 1$, $f(\$) \to 0$, $f(1) \to 2$, $f(2) \to 0$,

$\rho_0 = \{ (0,0), (\$,\$), (1,1), (2,2) \}$.

$\rho_1 = \rho_0 \cup \{ (\$,1), (1,\$) \}$,

$\rho_2 = \{ (0,0), (\$,\$), (1,1), (2,2), (\$,1), (1,\$),$

$(0,2), (2,0) \}$,

$\rho_3 = \{ (0,0), (\$,\$), (1,1), (2,2), (\$,1), (1,\$),$

$(0,2), (2,0), (1,0), (0,1) \}$,

$\rho_4 = A \times A$, $\rho_5 = \rho_4$, $\rho = \rho_4 = A \times A$.

A/ρ egyetlen eleme $\{ 0, \$, 1, 2 \}$. $\mathbf{A}/\rho$ szabályai:

$\# \to \{ 0, \$, 1, 2 \}$,

$f(\{ 0, \$, 1, 2 \}) \to \{ 0, \$, 1, 2 \}$.

$\pi(\mathbf{A}/\rho) = \theta(\mathbf{A}/\rho) = T_\Sigma \times T_\Sigma$.

Tétel. Minden $\mathbf{A}$ faautomatára

- $\mathbf{A}/\rho$ determinisztikus és megkonstruálható, és

- $\theta(\mathbf{A}) = \theta(\mathbf{A}/\rho)$.

Fő eredmények

Speciális eset, feltesszük hogy $\mathbf{A}$ összefüggő.

Tétel • Minden $\mathbf{A}$ összefüggő faautomatára (i), (ii) és (iii) ekvivalensek.

(i) $\pi(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{A}/\rho)$.

(ii) $\exists$ $\mathbf{B}$ determinisztikus faautomata hogy $\pi(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{B})$.

(iii) $\theta(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{A})$.

• Eldönthető hogy a fenti (i), (ii), (iii) tulajdonságok teljesülnek-e.

Általános eset, nem tesszük fel, hogy $\mathbf{A}$ összefüggő.

Tétel • Minden $\mathbf{A}$ faautomatára (i) és (ii) ekvivalensek.

• Minden $\mathbf{A}$ faautomatára eldönthető hogy az (i), (ii), (iii) tulajdonságok teljesülnek-e.

(i) $\pi(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{A}/\rho)$.

(ii) $\exists$ $\mathbf{B}$ determinisztikus faautomata hogy $\pi(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{B})$.

(iii) $\theta(\mathbf{A}) = \pi(\mathbf{A})$.

Irodalom

W.S. Brainerd, Tree generating regular systems, Information and Control 14 (1969), 217-231.

M. Dauchet, P. Heuillard, P. Lescanne and S. Tison, Decidability of the confluence of finite ground term rewrite systems and of other related term rewrite systems, Information and Control 88 (1990) 187-201.

J. Engelfriet, Derivation Trees of Ground Term Rewriting Systems, Information and Computation, 152 (1999) 1-15.

Z. Fülöp and S. Vágvölgyi, Ground term rewriting rules for the word problem of ground term equations, Bulletin of the EATCS, 45 (1991) 186-201.

Z. Fülöp and S. Vágvölgyi, Minimal Equational Representations of Recognizable Tree Languages, Acta Informatica, 34 (1997) 59-84.

Z. Fülöp and S. Vágvölgyi, Restricted Ground Tree Transducers, Theoretical Computer Science, 250 (2001) 219-233.

F. Gécseg and M. Steinby, *Tree Automata*, Akadémiai Kiadó. Budapest, 1984.

D. Kapur, Shostak's Congruence Closure as Completion, in Rewriting Techniques and Applications: in Proc. of the 8th International Conference, (Sitges, Spain, 1997) Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1232, Springer Publishing Company, New York, 1997, 23-37.

D. Kozen, Complexity of finitely presented algebras, in: Proc. of the 9th Annual ACM Symp. on Theory of Computing (Boulder, Colorado, 1977) 164-177.

D. Kozen, Partial Automata and Finitely Generated Congruences: An Extension of Nerodés Theorem, Technical report PB-400, Computer Science Department, Aarhus University, June 1992, also in: Proc. Conf. Logical Methods in Mathematics and Computer Science, ed. R. Shore, Ithaca, New York, June 1-3, 1992.

M. Oyamaguchi, The Church-Rosser property for ground term rewriting systems is decidable, Theoretical Computer Science, 49 (1987) 43-79.

D. Plaisted and A. Sattler-Klein, Proof lengths for equational completion, Information and Computation, 125 (1996) 154-170.

W. Snyder, A Fast Algorithm for Generating Reduced Ground Rewriting Systems from a set of Ground Equations, Journal of Symbolic Computation, 15 (1993) 415-450.

S. Vágvölgyi, A fast algorithm for constructing a tree automaton recognizing a congruential tree language, Theoretical Computer Science, 115 (1993) 391-399.

S. Vágvölgyi, Congruential Complements of Ground Term Rewrite Systems, Theoretical Computer Science, 238 (2000) 247-274.

S. Vágvölgyi, On ground tree transformations and congruences induced by tree automata, Theoretical Computer Science, 304 (2003) 449-459.